ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 33.2 (2015): 157-171
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1520
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Las funciones de dos variables: análisis mediante los resultados del diálogo entre la teoría APOS y la TAD

Two-variable functions: analysis from the point of view of a dialogue between APOS theory and ATD

María Trigueros
Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México
trigue@itam.mx

Rafael Martínez - Planell
Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Mayagüez, Puerto Rico
rmplanell@gmail.com

RESUMEN • Este artículo considera una aplicación de las aportaciones del diálogo entre las teorías APOS y TAD consideradas como *praxeologías de investigación*. Se utiliza para ello un problema de investigación relacionado con el aprendizaje de las funciones de dos variables. Después de la descripción de la investigación que condujo al diseño de una *descomposición genética*, se reformula el problema de investigación para hacer posible el diálogo. Se usan las aportaciones del diálogo desde las componentes teórica y técnico-tecnológica como herramienta de análisis de un conjunto de actividades, mostrando su pertinencia y viabilidad institucional.

PALABRAS CLAVE: APOS; teoría antropológica de lo didáctico; función de dos variables; diálogo.

ABSTRACT: This paper presents an application of the contributions from the dialogue between APOS theory and ATD considered as *research praxeologies*. A problem related to the learning of functions of two variables is used to show how tools resulting from the dialogue starting from the theoretical and technological components can be applied. After the description of the research work that led to the design of a *genetic decomposition*, the research problem is reformulated to make the dialogue possible. Results show the pertinence and institutional viability of the activities in the classroom.

KEYWORDS: APOS; anthropological theory of the didactic; function of two variables; dialogue.

Fecha de recepción: julio 2014 • Aceptado: febrero 2015

ANTECEDENTES Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Como es de esperar en toda disciplina que aún no ha alcanzado su madurez, en la investigación en educación matemática coexiste una diversidad de teorías y paradigmas. Un problema de importancia para esta comunidad es estudiar cómo estas teorías se comparan y pueden interactuar unas con otras. El número especial de la revista *ZDM* dedicado a las *networking strategies* (Prediger, Arzarello, Bosch y Lenfant, 2008) y el libro sobre este tema editado por Bikner-Ahsbahs y Prediger (2014) proporcionan una visión global del problema y resumen los resultados obtenidos de la comparación y posible coordinación de diversas teorías.

Como parte de este movimiento, recientemente se inició un diálogo entre las teorías Acción Proceso Objeto Esquema (APOS, por sus siglas en inglés) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011) que permitió un acercamiento entre ellas y resultó en un conjunto de aportaciones que las enriquecen. A la luz de dichas aportaciones surge un interesante problema de investigación que consiste en explorar su potencial en una investigación concreta, por ejemplo, el diseño de materiales para la enseñanza de las funciones de dos variables.

A pesar de la importancia de las funciones de dos variables, se ha investigado poco acerca de su enseñanza y aprendizaje. Las sugerencias de Yerushalmy (1997) han sido ratificadas en trabajos recientes que han profundizado en el aprendizaje de estas funciones (Trigueros y Martínez-Planell, 2007, 2010; Martínez-Planell y Trigueros, 2012*a*, 2012*b*, 2013; Kabael, 2011; Weber y Thompson, 2014). Estos estudios concluyen que en el aprendizaje de estas funciones no basta la generalización de algunos aspectos clave de las funciones de una variable, y proporcionan modelos sobre las construcciones necesarias para lograrlo.

Con el objetivo de ejemplificar el uso aportaciones del diálogo entre dos teorías, una cognitiva y otra antropológica, como referente teórico y partiendo de los resultados obtenidos en investigaciones previas sobre el aprendizaje de este tema, se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo puede reformularse el problema de investigación de la enseñanza y aprendizaje de las funciones de dos variables a la luz del diálogo entre las teorías APOS y TAD?
- ¿Cómo se pueden utilizar las aportaciones de este en la enseñanza de las funciones de dos variables?
- ¿Qué aporta dicho uso a la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de las funciones de dos variables realizada hasta el momento con la teoría APOS?

Con el fin de dar respuesta a estas preguntas, se presentan brevemente las dos teorías involucradas en el diálogo y las contribuciones de este. Se resumen después los resultados de un conjunto de investigaciones realizadas con APOS. Finalmente, se exponen los resultados del uso de las aportaciones del diálogo entre APOS y TAD en el análisis de la enseñanza de este tema.

APORTACIONES DEL DIÁLOGO ENTRE LAS TEORÍAS APOS Y TAD

Comenzamos por describir brevemente las teorías involucradas en el diálogo.

La teoría APOS está basada en las ideas de Piaget (1971). En ella la comprensión de un tema de matemáticas se logra a través de la reflexión del individuo sobre problemas matemáticos y su solución en un contexto social, mediante la construcción y reconstrucción de ciertas estructuras mentales y su organización en esquemas (Dubinsky, 2014).

Las estructuras propuestas por la teoría son: acciones, procesos, objetos y esquemas. Estas estructuras se construyen mediante mecanismos de abstracción reflexiva. Las acciones son un conjunto de instrucciones que pueden seguirse paso a paso para transformar un objeto matemático o físico conocido.

La reflexión sobre dicha transformación permite la interiorización de las acciones en un proceso. Esta estructura realiza la misma transformación pero mentalmente y sin necesidad de seguir explícitamente todos los pasos involucrados en ella. Distintos procesos se pueden coordinar de diferentes maneras o revertir para construir nuevos procesos. Cuando, al necesitar aplicar acciones a un proceso, el individuo se da cuenta de su totalidad, este se encapsula en un objeto.

Mientras el individuo desarrolla su comprensión de un tema de las matemáticas, construye distintas acciones, procesos y objetos que se van organizando y relacionando paulatinamente en un esquema. Conforme se organiza, el esquema evoluciona hasta llegar a ser coherente y permitir al individuo decidir si es posible usarlo o no en una situación matemática particular. Los esquemas se pueden tematizar para construir un objeto sobre el cual pueden aplicarse acciones o procesos. En esta teoría se requiere del diseño de un modelo predictivo, llamado *descomposición genética* (DG), en el que se describen las construcciones y los mecanismos que pueden estar involucrados en la construcción de un concepto. Este modelo se pone a prueba experimental para validarse y es útil en el diseño de materiales de enseñanza.

La metodología didáctica de APOS, conocida como ciclo ACE, parte del trabajo en equipo de los alumnos sobre actividades (A) diseñadas con la DG. Sigue con la discusión en grupo con el maestro (C) sobre el trabajo en las actividades y finalmente con el trabajo en forma individual o en equipo en ejercicios (E) de tarea. El ciclo se repite cuantas veces sea necesario para promover el conocimiento del concepto en cuestión.

La teoría APOS ha demostrado su eficacia en términos de capacidad de análisis teórico de distintos conceptos, evaluación del aprendizaje y diseño efectivo de enseñanza (Arnon *et al.*, 2013).

La TAD supone que la interpretación de la actividad matemática escolar requiere considerar los fenómenos relativos a la transformación de las matemáticas desarrolladas en la comunidad matemática para hacerlas enseñables en una institución escolar. Este fenómeno de transposición didáctica determina la relatividad institucional del conocimiento y constituye el principal objeto de estudio de la TAD (Chevallard, 1985; Bosch y Gascón 2006).

La TAD pone el acento en la actividad matemática institucionalizada (Chevallard, 1992), en la que los sistemas de conceptos, teoremas y demás objetos matemáticos se consideran componentes de las praxeologías matemáticas que aparecen organizadas en dos niveles: el primero remite a la práctica que se realiza (praxis), y el segundo a la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad (logos). La práctica se describe en términos de las tareas y técnicas matemáticas que se llevan a cabo efectivamente en una institución. El logos se describe en términos de la tecnología, entendida como el discurso o explicación de las técnicas, y la teoría como tal, que es la justificación formal de la tecnología. En los estudios en que se utiliza la TAD se puede centrar la atención en la actividad de enseñanza de las matemáticas en la institución (praxeologías didácticas).

Para explicar la actividad matemática institucional se elaboran modelos epistemológicos del contenido matemático de interés que sirven de referencia (MER) para analizar las actividades de enseñanza de las matemáticas en una institución particular. Los datos empíricos provienen de las distintas instituciones involucradas en el proceso de transposición didáctica y deben explicitar las actividades concretas consideradas como la razón de ser del conocimiento matemático. Así se estudian las condiciones necesarias para que existan las actividades matemáticas y las restricciones que impiden su desarrollo.

En la consideración de los procesos de enseñanza de la matemática se detectan aspectos invariantes que la estructuran. Estos aspectos, conocidos como los *momentos didácticos*, se discuten más adelante (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003).

La TAD se ha utilizado exitosamente para describir la actividad matemática en distintas instituciones y para proponer modelos praxeológicos que contribuyen a una mejor organización institucional de la misma.

El diálogo entre estas dos teorías (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011) establece el postulado de que cualquier cambio de perspectiva teórica se manifiesta en una evolución simultánea de la teoría científica como tal y de los problemas que esta estudia. En conformidad con este postulado se propuso conceptualizar las teorías científicas considerándolas como praxeologías de investigación (PI) y tomar en consideración los cuatro componentes básicos de cualquier praxeología. Al llevarlo a cabo desde los componentes técnico-tecnológico y teórico se encontraron aportaciones de cada teoría que extienden el marco teórico de la otra sin violentar sus supuestos básicos. La modalidad de diálogo que parte de los problemas se dejó abierta a investigaciones futuras. El ejemplo que aquí se presenta contribuye en esta dirección.

Los resultados del diálogo a partir del componente teórico incluyen la noción de «alumno genérico» de una institución dada y la de DG como punto de contacto entre ambas PI. La primera puede asimilarse a la de «sujeto en posición de alumno» en la TAD y en APOS permite tomar en cuenta la incidencia de la interpretación institucional de un concepto sobre su DG. Aunque los datos que se obtienen con APOS reflejan las construcciones mentales que hacen individuos, la utilidad del conglomerado de datos que así se obtiene reside en los patrones de comportamiento que puedan observarse a través de diversos individuos. En este sentido el comportamiento que se recoge en esos patrones refleja lo que podría ser la posible construcción mental del «alumno genérico». Esto invita a que la DG incluya suficiente detalle como para reflejar posibles construcciones mentales de ese «alumno genérico» y de esta forma delata la dependencia institucional. En cuanto al segundo resultado del diálogo que aquí se discute, se consideró un paralelismo de la DG con la noción de «modelo epistemológico de referencia» (MER) de la TAD en el sentido que ambas nociones son modelos transitorios (conjeturas) que sirven de base a la investigación pero que hay que contrastar y modificar de acuerdo a la práctica que se dé en individuos (en el caso de la DG) o en la institución (en el caso del MER). Las ideas del «alumno genérico» y del paralelismo entre las nociones de DG y de MER se discuten más ampliamente en Trigueros, Bosch y Gascón (2011).

Al considerar la manera en que cada una de las PI toma la matemática como parte de su objeto de estudio, se observaron dos puntos de divergencia: 1) La TAD pone el acento en el *nivel institucional* de la construcción del conocimiento matemático, mientras que las *praxeologías personales* son un reflejo de las correspondientes *praxeologías institucionales* que, a su vez, contribuyen a construir. La teoría APOS enfatiza el *nivel personal* de la construcción del conocimiento matemático con base en la dialéctica sujeto-objeto del conocimiento de la epistemología de Piaget; en ella el *nivel institucional* está presente dado que las construcciones modelizadas se materializan en un conjunto de actividades que se usan en un contexto institucional concreto a través del ciclo ACE. 2) El modelo epistemológico de la teoría APOS propone una interpretación de las matemáticas que enfatiza su descomposición en *sistemas de conceptos matemáticos*; en ella, la *actividad* de los sujetos frente a tareas específicas es un componente primordial dado que es la reflexión sobre ella lo que permite la construcción de los conceptos matemáticos. El modelo epistemológico de la TAD acentúa la *actividad* matemática institucionalizada en la que los *sistemas de conceptos* y otros objetos matemáticos se consideran componentes de las praxeologías matemáticas que se usan en una institución. Puede constatarse que aun en los puntos de mayor divergencia existen puntos que permiten a ambas PI aproximarse.

Con relación al diálogo desde el componente técnico-tecnológico, las técnicas de investigación científica son descritas, justificadas, interpretadas y *generadas* por los resultados tecnológicos que la PI formula y la metodología científica que se usa para obtener dichos resultados. La reinterpretación de algunos de los «resultados» y de la metodología de cada teoría condujo a resultados que las enriquecen al incorporarlos mediante su necesaria adecuación. De particular interés para el trabajo que aquí se presenta son el principio de la *relatividad institucional del saber* de la TAD, que puede reinterpretarse para generalizar el papel actual de la DG en la teoría APOS al considerarla como relativa a los alumnos genéricos de una institución dada, y *los momentos didácticos* de la TAD, cuya reinterpretación permite una descripción detallada del ciclo de enseñanza ACE de APOS mediante un análisis de las actividades didácticas que se diseñan según esta teoría en relación con el papel que juegan dentro de la estructura de los procesos de estudio.

Algunas de las actividades del ciclo ACE tienen el propósito de promover las primeras acciones de los estudiantes sobre objetos conocidos e iniciar el proceso de construcción de nuevos objetos. Otras intentan brindar oportunidades a los alumnos de relacionar objetos o procesos que, a los ojos del estudiante, eran ajenos. Estos dos tipos de actividad pueden considerarse como el *momento del primer encuentro del ciclo ACE*.

Cuando los estudiantes realizan acciones sobre objetos conocidos, reflexionan sobre ellas y pueden interiorizarlas en procesos. Las actividades se considerarían dentro del *momento exploratorio del ciclo ACE*. Algunas de ellas se pueden, además, relacionar con el desarrollo de las técnicas, situándose así en el *momento del trabajo de la técnica*. Otras, en cambio, se relacionan con la construcción de propiedades de los objetos matemáticos o de lazos entre distintos objetos y podrían considerarse como parte del *momento tecnológico-teórico*.

Aquellas actividades cuya meta es precisar definiciones y teoremas relativos a los objetos construidos en los distintos tipos de actividades pueden asociarse al *momento de institucionalización*, el cual juega un papel preponderante en la fase de discusión del ciclo ACE. El *momento de la evaluación* pone énfasis en los resultados que permiten contrastar el aprendizaje de los estudiantes, incluyendo la revisión del trabajo en diversas actividades y exámenes. En APOS, la evaluación juega además un importante papel como herramienta para validar si las construcciones predichas en la DG producen las construcciones deseadas. En caso de no ser así, los resultados obtenidos de la evaluación permiten refinar el modelo para una aplicación posterior.

Este trabajo se restringe a la aplicación de estos resultados del diálogo entre APOS y TAD. La aplicación de otros resultados, por ejemplo la relación entre los niveles Intra- Inter- Trans- de evolución de un esquema y el desarrollo de las praxeologías (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011), se deja para una futura investigación.

EJEMPLO DE USO DE LAS HERRAMIENTAS DEL DIÁLOGO ENTRE LAS PI

El problema: investigación previa y DG

El proyecto que aquí se presenta parte de los resultados obtenidos en un proyecto anterior en el que se utilizó la teoría APOS para analizar las construcciones requeridas en el aprendizaje del concepto función de dos variables (Trigueros y Martínez-Planell, 2007, 2010; Martínez-Planell y Trigueros, 2012*a*, 2012*b*). Las preguntas de investigación formuladas entonces fueron: ¿Qué construcciones mentales se requieren para el aprendizaje del concepto de función de dos variables? ¿Promueven las actividades para el ciclo ACE, diseñadas con base en la DG, las construcciones predichas por esta? ¿Permiten estas construcciones el uso de dichas funciones en la solución de problemas matemáticos?

A partir del diseño de una DG preliminar se elaboraron instrumentos de investigación para ponerla a prueba mediante el análisis de las construcciones de un grupo de estudiantes universitarios que habían cursado con éxito Cálculo Multivariado en una universidad pública siguiendo un acercamiento didáctico tradicional, no relacionado con la teoría APOS. Las entrevistas semiestructuradas e individuales a un grupo de estudiantes aprobados y seleccionados por el profesor, además del trabajo durante el curso, mostraron que la mayoría de los alumnos entrevistados no había construido un esquema coherente para R^3, considerado como prerrequisito en la DG preliminar. Si bien todos mostraban la construcción de una noción intuitiva del espacio tridimensional, se evidenció su falta de construcción del subesquema de subespacios de R^3 y cómo ello repercutía fuertemente en su posibilidad de construir las estructuras propuestas en la DG para el aprendizaje de las funciones de dos variables. En resumen, las dificultades encontradas se refieren a los distintos procesos asociados a la comprensión geométrica y formal de estas funciones y a obstáculos específicos que la transición del estudio de las funciones de una variable a las funciones de dos variables presenta. La comparación de las construcciones mostradas por distintos estudiantes, inferidas del análisis de la entrevista, mostró la pertinencia de algunas de las contenidas en la DG y algunos aspectos comunes en la actividad de los estudiantes sugerían construcciones no contempladas en la DG preliminar. En específico se halló que la construcción de los planos fundamentales (planos paralelos a los planos coordenados) como objeto es indispensable en la construcción del proceso de su intersección con superficies, y más importante aún, el colocar la intersección en el lugar que le corresponde en el espacio. Por ejemplo, al pedir a estudiantes que graficaran en el espacio los puntos que satisfacen $y = 2$ y además están en la gráfica de $f(x,y) = x^2 + y^2$ resultó que muchos de ellos graficaron $z = x^2 + 4$ en un plano cartesiano y colocaron la curva resultante en el plano XZ de R^3. Se observó que el uso de lenguaje informal puede actuar como obstáculo didáctico, lo que sugirió utilizar un lenguaje verbal específico que evite la ambigüedad y apoye la conversión entre representaciones simbólicas, geométricas y físicas. Quedó claro que los estudiantes requieren atención especial para construir una noción de dominio de función de dos variables como conjunto de pares ordenados y su representación geométrica como un subconjunto del plano XY en R^3. El caso en que el dominio está dado explícitamente como una restricción causa especial dificultad en los estudiantes. Por ejemplo, al pedir a estudiantes representar en el espacio la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ con dominio restringido a los pares ordenados que satisfacen $-1 \le x \le 1$ y $-1 \le y \le 1$, muchos graficaron un círculo unitario, otros un sólido en el espacio y otros más insistieron en graficar la superficie para luego proyectar sobre el plano XY. Se concluyó del análisis que los estudiantes, en general, no generalizan su conocimiento de las funciones de una variable a las funciones de dos variables.

A partir de estos resultados se consideró la necesidad de refinar la DG para incluir en ella las construcciones no previstas y otras para favorecer construcciones en que los estudiantes mostraron dificultad, por ejemplo, la formación de secciones trasversales en situaciones en las que la regla de la función contiene alguna variable libre, el trazo de la gráfica de la funcion de dos variables que se pueden representar simbólicamente con una sola variable independiente (cilindros) o la intersección de superficies como $z = x \operatorname{sen} y$ con el plano $x = 0$ (donde se observó frecuentemente que los estudiantes indicaban que la intersección consistía únicamente del origen en vez del eje Y). La DG refinada fue nuevamente puesta a prueba en un segundo ciclo de entrevistas (Martínez-Planell y Trigueros, 2013) con el mismo tipo de alumnos. El análisis de los datos mostró que la DG refinada era un mejor modelo para el aprendizaje de las funciones de dos variables pero que aún necesitaba refinarse y las actividades didácticas debían revisarse en consecuencia. Una dificultad que persistió fue la relacionada con la intersección de superficies con planos fundamentales. Finalmente, fue posible encontrar nueva evidencia del papel que juegan la construcción y la coherencia del esquema para R^3 y, en particular, del papel que juega la construcción de un proceso de intersección entre superficies y planos en R^3 en la construcción e interpretación de las gráficas de estas funciones.

Con los resultados anteriores se procedió a refinar nuevamente la DG y a complementar los nuevos materiales didácticos. Ambos se pusieron a prueba luego de un año académico de uso en el aula siguiendo el ciclo ACE como estrategia didáctica, en un tercer y último ciclo de entrevistas. En esta experiencia participaron alumnos del grupo en el que se probaron las actividades y alumnos, del mismo tipo que aquellos participantes en los estudios anteriores, que cursaron la materia en secciones en las que se siguió un acercamiento tradicional. En esta ocasión, la diferencia en comprensión encontrada entre quienes siguieron el curso experimental y quienes siguieron el curso tradicional en el análisis de los datos permitió validar la siguiente DG refinada como un modelo adecuado para describir las construcciones mostradas por los estudiantes.

Construcciones previas requeridas

Esquema que resulta de la percepción física del espacio tridimensional.

Esquema de plano cartesiano que incluya el concepto de punto como objeto y representaciones de relaciones y otros subconjuntos del plano como procesos.

Esquema para los números reales que incluya el concepto de número como objeto y las transformaciones aritméticas y algebraicas como procesos.

Objeto conjunto y la notación básica de conjuntos.

Esquema para las funciones de una variable (f: R $\rightarrow$ R) que incluya el concepto de función, las operaciones con funciones, transformaciones, y la coordinación de la representación analítica y gráfica de estas funciones como procesos.

Construcciones que se han de desarrollar

Los esquemas de plano cartesiano, números reales y de espacio tridimensional se coordinan en un nuevo esquema: el esquema del espacio cartesiano R^3 a través de la acción de asignación de un número real a un punto en R^2 y la acción de representación del objeto resultante como una tripleta ordenada y como un punto en el espacio.

Estas acciones se interiorizan en el proceso que considera todas las posibles tripletas y su representación en el espacio como el espacio R^3, así como en procesos que consideran algunos de sus subconjuntos, particularmente planos fundamentales (planos de la forma $x = c$, $y = c$, $z = c$, donde c es una constante) en sus diferentes representaciones. Los procesos de R^3 y plano fundamental se coordinan con los procesos de función de una variable y de conjunto, resultando en procesos de consideración de conjuntos de puntos en R^3 como gráficas de funciones de una variable y de sus representaciones como curvas, y en procesos de consideración de otras regiones en el espacio para construir un esquema de subconjuntos de R^3. Este esquema incluye la intersección de planos fundamentales con superficies para formar: secciones, contornos, proyecciones, y cilindros. También incluye intersecciones que resultan en variables libres como la de superficies con ejes, y otros subconjuntos como relaciones y regiones.

El esquema de subconjuntos de R^3 y el esquema para funciones de una variable se coordinan a través de la acción de tomar un punto en un subconjunto dado del plano xy y asignarle un y solo un número. Estas acciones pueden generalizarse en el proceso de consideración de todas las posibles asignaciones de un solo número a los puntos en un conjunto dado y en procesos de dominio y rango.

La coordinación de los procesos de evaluación, dominio y rango de la función en distintos registros de representación resulta en un proceso de función de dos variables en el que se identifica ((x,y),z) con (x,y,z).

La noción de función de dos variables como proceso se coordina con el esquema de subconjuntos de R^3 y con el proceso de transformaciones de funciones de una variable a través de la acción de representar en R^3 los diferentes puntos (x, y, z) en la gráfica de la función que resultan de dejar una variable fija para construir la gráfica de las funciones de dos variables. Esta acción de evaluación de la función sobre un subconjunto del dominio se interioriza en un proceso de trazo de contornos y secciones transversales y se encapsula en el objeto función de dos variables.

Como se mencionó, el diálogo entre las teorías APOS y TAD sugiere desarrollar la noción de momentos de estudio del ciclo didáctico ACE. Para poder utilizar esta herramienta metodológica se presenta enseguida la necesaria reformulación del problema de investigación original, en congruencia con el postulado del diálogo entre estas teorías.

DIÁLOGO ENTRE LAS TEORÍAS A PARTIR DE LOS PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN

Reconstrucción del problema

La reconstrucción del problema de investigación condujo a las siguientes preguntas:

En una institución universitaria concreta: ¿Qué características tienen las praxeologías didácticas que se utilizan para generar una praxeología matemática local asociada a las funciones de dos variables? ¿Qué restricciones limitan que los estudiantes puedan recorrer los momentos didácticos y desarrollar praxeologías adecuadas? ¿Qué condiciones se requieren en la realización de procesos didácticos para que las actividades diseñadas mediante las herramientas de la teoría APOS permitan a los alumnos recorrer los distintos momentos didácticos y generar una praxeología matemática local ligada a las funciones de dos variables? ¿Qué restricciones se presentan al utilizar estas actividades?

La respuesta a estas preguntas requiere de varios ciclos de investigación. Reportamos aquí el avance de esta investigación en cuanto a las actividades correspondientes al trazo e interpretación de las gráficas de funciones de dos variables.

Análisis de un libro de texto

En una revisión de la literatura referente al análisis de textos de matemáticas, Fan, Zhu y Miao (2013) argumentan que se han hecho progresos respecto a las propuestas de análisis y comparación de textos en la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. Entre los marcos teóricos de análisis, empleados frecuentemente en el nivel escolar elemental, se encuentran, entre otros, los de Valverde *et al.* (2002) y su refinación por O'Keeffe y O'Donaghue (2011). Los textos se analizan y comparan a través de los componentes: contenido, estructura, expectativas y lenguaje, pero el análisis se dirige a factores motivacionales como la inclusión de notas históricas, biografías, etc.; apoyos para la comprensión, como los diagramas; uso de tecnología y énfasis, y orientación filosófica. Este tipo de análisis puede ser efectivo en el nivel elemental, pero no corresponde a las necesidades de los materiales destinados a la educación superior. Más cercanos al interés de este trabajo podrían considerarse el método empleado por Font y Godino (2006) a partir de los componentes de la configuración epistémica del Enfoque Onto-Semiótico o el desarrollado por Mesa *et al.* (2012) basado en la noción de concepción (Balacheff y Gaudin, 2002). Sin embargo, recordemos que el objetivo de esta investigación consiste en evidenciar las potencialidades de las herramientas de análisis emergentes del diálogo APOS-TAD, por lo que la selección de un método para evaluar tanto los materiales didácticos como la enseñanza debe ser consistente con dicho objetivo y, por ello, se decidió usar los *momentos didácticos del ciclo* ACE para llevar a cabo dichos análisis.

Iniciamos con el análisis de la organización didáctica del tema de análisis gráfico de las funciones de dos variables en el texto empleado en la institución de interés (Stewart, 2006). Si bien el texto no fue redactado basado en una teoría didáctica, el análisis con los *momentos de estudio del ciclo ACE* da idea de las oportunidades para construir los conceptos relacionados con las funciones de dos variables que se presentan a los estudiantes. El análisis mostró (Trigueros y Martínez-Planell, 2011) que las tareas relacionadas con el *momento del primer encuentro* y que permiten al lector realizar acciones sobre objetos conocidos son escasas y están dispersas en diferentes capítulos y secciones. Las tareas asociadas a este momento relacionadas con la construcción de subespacios de R^3, particularmente la intersección de planos fundamentales con gráficas de funciones y su localización en el espacio, están prácticamente ausentes, y aquellas necesarias en la construcción e interpretación de las gráficas de las funciones de interés se limitan a las superficies cuadráticas. El *momento exploratorio* incluye muy pocas tareas en las que el autor del texto supone, sin explicación, que el lector ha construido los procesos de reconocer y trazar familias de curvas en el espacio. El texto no incluye actividades relacionadas con los procesos asociados a las técnicas de análisis y construcción de gráficas de las funciones, por ejemplo tareas de construcción del proceso de intersección de planos fundamentales con otros subconjuntos de R^3, aunque la técnica se explica verbalmente. En general, las oportunidades de construcción de las acciones y procesos necesarios para dibujar e interpretar las gráficas presentadas son escasas. En resumen, no se encuentran oportunidades suficientes de exploración que permitan al estudiante desarrollar las técnicas como procesos. El *momento de trabajo en la técnica* está apenas presente. Excepto por algunos párrafos desconectados y pocos ejercicios adicionales, no se encontraron actividades relacionadas con el *momento tecnológico-teórico*. El *momento de institucionalización* se limita a la presentación de algunas definiciones, y la evidencia relacionada con el *momento de evaluación* es exigua y no permite construir un mensaje consistente sobre la importancia del análisis gráfico de este tipo de funciones.

Se puede concluir que el recorrido de los momentos de estudio no es suficiente para que los estudiantes construyan las estructuras necesarias para el aprendizaje de las funciones de interés.

Análisis de la enseñanza

Uno de los investigadores observó la presentación del tema correspondiente a estas funciones en la clase de varios profesores durante dos semanas. Sus registros de observación se analizaron de la misma manera que los textos. Dado que no se encontró diferencia sustantiva entre las presentaciones de los diferentes profesores, se reportan las observaciones correspondientes a uno de ellos que puede considerarse como representativo del conjunto.

Los resultados muestran que el *momento del primer encuentro* se caracteriza por dos tipos de tarea: discusión en clase acerca de funciones de una variable y definición de función de dos variables. El profesor brindó pocas oportunidades a los alumnos de generalizar su conocimiento sobre funciones de una variable para comprender, al menos parcialmente, las funciones de dos variables. Preguntas del tipo «¿Cómo trazarían la gráfica de una función de dos variables?» y «¿Qué se obtiene al trazar la gráfica de la función?» caracterizaron el *momento exploratorio*, aunque el profesor no dio oportunidad a los alumnos de hacer acciones sobre las funciones consideradas ni de reflexionar sobre ellas. Las pocas tareas que se presentaron, dentro y fuera de clase, para reconocer, interpretar y trazar superficies en el espacio, se limitaron a la construcción e interpretación de planos fundamentales, aunque algunas actividades incluyeron acciones para mostrar la técnica para emplearlos y las intersecciones con los ejes coordenados para trazar gráficas de funciones de dos variables. En el *momento de trabajo en la técnica*, el profesor recordó la definición de funciones de dos variables, explicó y discutió posibles acciones sobre curvas relacionadas con secciones cónicas para obtener superficies cuadráticas y explicó la generalización de esa técnica para facilitar el trazo de gráficas y la identificación del dominio y el rango de funciones representadas analíticamente. Sin embargo, esta actividad no se complementó con oportunidades de que los alumnos hicieran ellos mismos las acciones o procesos considerados. Una discusión explícita sobre el resultado de la sustitución de un número por una variable en una ecuación con tres variables, otra sobre contornos y dominios de las funciones y una explicación de la definición de estas funciones constituyeron los *momentos tecnológico-teórico* y *de institucionalización*, ambos muy restringidos. Un examen al final del periodo se consideró como el *momento de evaluación.* Ahí se pidió dibujar la gráfica de una función simple usando la técnica de los planos fundamentales, además de encontrar la intersección de un plano fundamental con una superficie dada y trazar la gráfica de la curva resultante en el plano.

La conclusión de este análisis indica que el recorrido de los momentos de estudio del ciclo ACE es insuficiente para que los alumnos construyan conocimiento sobre las funciones en cuestión y desarrollen la capacidad de usar las técnicas presentadas para analizar sus propiedades e interpretar su comportamiento. Si se considera conjuntamente el uso del texto con el desarrollo del tema por el profesor, se encuentra que la organización del estudio es aún muy incompleta. El desarrollo del bloque práctico es superficial; los estudiantes tienen pocas oportunidades de explorar y practicar las técnicas y de establecer relaciones entre la definición de las funciones y sus distintas representaciones. El bloque teórico se limita a explicaciones aisladas del trabajo en el bloque práctico. En suma, la organización del estudio es inefectiva.

Estos resultados permiten atribuir algunas dificultades encontradas en los estudios con APOS a la insuficiencia del trabajo sobre ambos bloques y a que la organización del estudio, poco coherente y desbalanceada, no brinda oportunidades de construcción de las estructuras predichas en la DG para el aprendizaje de estas funciones.

Análisis de actividades diseñadas con la teoría APOS

El desarrollo de las actividades para favorecer las construcciones incluidas en la DG siguió un proceso de dos ciclos de investigación: diseño, uso en clase y análisis de resultados mediante los *momentos de estudio del ciclo ACE* para determinar las construcciones que el recorrido de los momentos de estudio promueve. En el segundo ciclo se tomaron en cuenta los resultados del análisis del texto y de la enseñanza en la universidad. Los siguientes resultados corresponden al análisis y puesta a prueba del conjunto final de actividades.

Las actividades constan de cinco bloques. Cada uno de ellos trata un aspecto específico de la construcción de las funciones de dos variables: *a*) planos fundamentales y superficies; *b*) cilindros; *c*) dominio, rango y regla de correspondencia; *d*) gráficas, y *e*) mapas de contornos y gráficas. En las actividades se prioriza la técnica de construcción de secciones trasversales para analizar y trazar gráficas incluyendo el uso de un manipulativo (McGee, 2009) para promover la construcción del espacio tridimensional y los planos fundamentales antes de introducir la definición formal de estas funciones.

Las actividades se probaron en un aula de la misma institución y se revisaron en dos semestres consecutivos. Los resultados del análisis mostraron que:

La mayoría de las actividades del bloque *a*) pertenecen al *momento del primer encuentro.* En ellas las tareas introducen las acciones necesarias para la construcción de los elementos esenciales de las funciones y de los subespacios de R^3 y promueven su interiorización y el establecimiento de relaciones entre ellos. Muchas de las actividades que piden encontrar la intersección de planos fundamentales con superficies en R^3 y reflexionar sobre su resultado pueden considerarse como parte del *momento exploratorio*. Estas actividades inducen a la reflexión y discusión en equipo de las acciones y el resultado de estas; ello contribuye tanto a su interiorización como a la coordinación de procesos. Favorece también –mediante tareas enfocadas en la interpretación de expresiones que contienen variables libres y la consideración de procesos de tratamiento y conversión en y entre distintas representaciones– su encapsulación en objetos.

Parte de las actividades del bloque *b*) se incluyeron en el *momento exploratorio*. En ellas se trabaja con superficies en el espacio tridimensional; en particular con superficies descritas mediante dos variables que promueven la reflexión sobre los procesos incluidos en el trazo de gráficas de funciones simples, como $z = x^2$, en tres dimensiones. La exploración del resultado de las acciones de representación punto a punto, así como su interiorización en un proceso de variación, permite encontrar semejanzas y diferencias con funciones de una variable. Las otras actividades forman parte del *momento del trabajo de la técnica* pues alientan la coordinación de aquellos procesos necesarios en el desarrollo de una técnica para dibujar cilindros tridimensionales.

En los bloques *d*) y *e*), las tareas tratan la coordinación de los procesos de uso de secciones trasversales, intersecciones, contornos, y familias de transformaciones de funciones de una variable para construir gráficas de diversas funciones de dos variables. Estas actividades forman parte del *momento del trabajo de la técnica*. Además, las actividades orientadas a la construcción de procesos de interpretación de gráficas, en particular, del papel que juegan en ellas las curvas que se obtienen de distintas intersecciones, promueven la interiorización y coordinación de procesos e intentan favorecer la encapsulación de los procesos y la construcción de un esquema coherente para R^3 y se identifican claramente con el *momento tecnológico teórico.* Algunas actividades del bloque *c*), que tratan de la construcción de procesos para reconocer y representar dominio y rango de funciones de dos variables y para identificar funciones en representaciones simbólica y gráfica, también se identifican con este momento.

Algunas tareas incluidas en los bloques *a*), *b*), *d*) y *e*) se refieren a la verificación de la correspondencia entre la gráfica trazada y la expresión algebraica de la función; identificación como parte de la superficie trazada, de las curvas resultantes; trazo de curvas correspondientes a la intersección de planos fundamentales específicos con la gráfica de una superficie dada y determinación de la relación entre representaciones algebraicas de funciones de dos variables y un conjunto dado de gráficas de superficies, justificando los resultados mediante secciones trasversales. Todas ellas se consideran dentro del *momento de evaluación*.

El análisis muestra que la variedad de actividades que forman parte del *momento de exploración* enfatiza el uso y la importancia de las secciones trasversales, haciendo el *momento de primer encuentro* y el *momento de trabajo en la técnica* explícitos. La inclusión de oportunidades de discusión y justificación de los métodos utilizados puede considerarse parte del *momento de institucionalización*, el cual se complementa con discusión de los procedimientos y sus resultados durante la discusión en grupo y con su uso explícito, a lo largo del curso, como tecnología de justificación en diversos temas, por ejemplo, derivadas parciales.

Este análisis sugirió que el recorrido de los momentos de estudio está balanceado y puede ser eficaz en la enseñanza de estas funciones. Contribuyó, además, a rediseñar las actividades en términos de cantidad y redacción.

Comparando el análisis del *momento del primer encuentro del ciclo ACE* en el libro de texto con el de las actividades sobresale la importancia de este momento. El texto no brinda oportunidades a los alumnos de construir un proceso de plano fundamental, lo que se refleja en sus dificultades para construir un proceso de intersección de planos fundamentales con superficies. Las actividades del primer bloque, en cambio, ponen énfasis en la introducción de un lenguaje verbal apropiado para describir la posición y movimiento de puntos en el espacio, y en la introducción de oportunidades de reflexión sobre acciones y procesos con planos fundamentales.

Los resultados del análisis de las tareas de *exploración* condujeron a diversificarlas. Se incluyeron, por ejemplo, tareas de exploración de tratamientos y conversiones entre representaciones (Duval, 2006). En cuanto al *trabajo de la técnica*, se decidió reducir el número de actividades, eliminando la repetición de tareas similares entre ellas o a las del texto para que la colección fuese tal que los estudiantes pudieran trabajar en el tiempo real de estudio. Igualmente se redujo la cantidad y distribución de tareas correspondientes al *momento tecnológico-teórico*, se añadió la petición de generalizar, explicar y/o justificar su trabajo y se incluyó el bloque *c*) de actividades. En cuanto a la *evaluación* se aumentó la cantidad de actividades donde el estudiante puede verificar su trabajo. El análisis de la discusión de las actividades en clase condujo a subrayar la importancia de corregir y dar nota al trabajo que entregan los estudiantes y a una versión de las actividades que se genera y se corrige por computadora (en proceso). El momento de *institucionalización* se observa mayormente en el uso continuo y explícito del lenguaje que se introduce en las actividades a través de todo el curso.

En resumen, los análisis de texto e instrucción proporcionaron una herramienta complementaria para explicar las dificultades de los alumnos y mejorar las actividades diseñadas para ayudarlos a superar estas dificultades. Ello corrobora los resultados obtenidos a partir de las observaciones del comportamiento de los estudiantes al graficar y razonar sobre las funciones de dos variables.

CONCLUSIONES

Los resultados de este ejemplo de diálogo entre las PI sugieren que la DG permite diseñar una organización del estudio de estas funciones con mayor potencial en términos de aprendizaje y que la atención al balance en el recorrido de los momentos de estudio contribuye a mejorar esa organización del estudio. Los resultados son alentadores pero hace falta investigación sobre la comparación de las construcciones que las actividades basadas en la DG promueven en distintas instituciones para incorporar la posible relatividad institucional de los conocimientos matemáticos, así como investigación donde se exploren los resultados del dialogo que tratan del desarrollo institucional de las técnicas en la TAD (técnica-acción, técnica-proceso, técnica-objeto) y de la relación entre los niveles Intra-Inter-Trans de evolución de un esquema y el desarrollo de las praxeologías (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011).

Los resultados obtenidos dan respuesta a las preguntas del problema reconstruido: el modelo propuesto en la DG señala las construcciones necesarias y su relación con el contenido matemático que se ha de incorporar en la didáctica de este tema, que serían difíciles de detectar desde un análisis puramente institucional. La praxeología didáctica derivada de la DG resulta en actividad matemática en la institución en la que la coherencia y el balance de los momentos de estudio contribuyen a la construcción de las estructuras necesarias para el aprendizaje de los aspectos gráficos de las funciones de dos variables.

Este trabajo contribuye a la reflexión acerca del diálogo entre las teorías APOS y TAD al considerar un ejemplo en el que un problema originalmente planteado desde la teoría APOS se reformula en términos compatibles con el resultado del diálogo y se analiza mediante las herramientas resultantes de las componentes teórica y técnico-tecnológica del mismo. Se explicita así la dimensión institucional al considerar la DG del concepto de función de dos variables relativa a una institución particular y a un sujeto genérico de esta. Los momentos de estudio del ciclo ACE muestran su utilidad como herramientas esenciales de análisis. Todo ello corrobora la unidad de los componentes de una PI.

Este estudio aporta evidencias de que el diálogo entre las dos teorías provee una visión institucional que está ausente en la teoría APOS, sin dejar de lado la fortaleza de esta última en los aspectos cognitivos, ausentes en la TAD. Esta visión contribuye a mejorar el diseño didáctico al incluir ambas, la dimensión cognitiva y la institucional, mediante una adecuación de las tareas planteadas desde la DG a las restricciones institucionales. Enriquece, además, el acercamiento al fenómeno de la enseñanza y el aprendizaje de estas funciones, lo que puede traducirse en un mejor aprendizaje de los alumnos.

Otra aportación del estudio consiste en mostrar que las aportaciones que han surgido del diálogo entre estas dos PI enriquecen las preguntas de investigación y el análisis de los fenómenos didácticos. La información obtenida del análisis de los textos, de la clase y de las actividades diseñadas y refinadas a través de varios ciclos de investigación constituye otra aportación al mostrar que, con el uso de una metodología poderosa, es posible determinar factores que se deben considerar en el rediseño de actividades efectivas para el aprendizaje de los alumnos de la institución. Es de esperar que el análisis de su uso muestre que muchas de las dificultades encontradas en el aprendizaje de las funciones de dos variables pueden superarse cuando se consideran tanto los factores cognitivos como los factores institucionales que inciden en el aprendizaje de las funciones de dos variables.

La investigación que se reporta en este trabajo reafirma la indisolubilidad de los distintos componentes de las PI, así como que existen puntos de contacto que acercan a estas teorías, aparentemente lejanas entre sí.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N., y Gaudin, N. (2002). *Student conceptions: an introduction to a formal characterization*. *Les Cahiers du Laboratoire Leibnitz*, 65. Disponible en línea: <http://www-leibnitz.image.fr/LesCahiers/Cahiers2002.html>.

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (eds.) (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education.* New York: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9

Bosch, M.; Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(1), pp. 79-136.

Bosch, M. y Gascón, J. (2006). 25 years of the didactic transposition. *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction*, 58, pp. 51-65.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir eneigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, pp. 73-112.

Dubinsky, E. (2014). APOS Theory. En S. Lerman (ed). *Encyclopedia of Mathematics Education*. New York: Springer (en prensa).

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educ. Stud. Math*, 61, pp. 103-131. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Fan, L.; Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, vol. 45, pp. 633-646. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matematica Pesquisa*, 8(1), pp. 67-98.

Kabael, T. (2011). Generalizing Single variable functions to two variable functions, function machine and APOS. *Kuram ve Uygularmada Egitim Bilimler. Educational sciences theory and practice*, 11(1), pp. 484-499.

Martínez-Planell, R. y Trigueros Gaisman, M. (2012*a*). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), pp. 365-384. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9408-8

Martínez-Planell, R. y Trigueros Gaisman, M. (2012*b*). *Activity sets to help student graphing of functions of two variables*. En *Proceedings of the 12th International Congress of Mathematics Education*, ICME-12 (pp. 2759-2769, in Topic Study Group 13, TSG13-13). Seoul: ICME.

Martínez-Planell, R. y Trigueros, M. (2013). Graphs of functions of two variables: Results from the design of instruction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), pp. 663-672. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2013.780214

McGee, D. (2009). *Visualization tools for 3D*. Disponible en línea: <http://quiz.uprm.edu/visual3d/>.

Mesa, V.; Suh, H.; Blake, T. y Whittemore, T. (2012). Examples in college algebra textbooks: Opportunities for students' learning. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 23(1), pp. 76-105.
http://dx.doi.org/10.1080/10511970.2012.667515

O'Keeffe, L. y O'Donaghue, J. (2011). The use of evidence based research on mathematics textbooks to increase student conceptual understanding. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjects in Education*, 2(1), pp. 304-311.

Piaget, J. (1971). *Genetic epistemology*. New York: W.W. Norton.

Prediger, S.; Arzarello, F.; Bosch, M. y Lenfant A. (2008). Comparing, combining, coordination: Networking strategies for connecting theoretical approaches. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), pp. 163-164.
http://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0093-0

Stewart, J. (2006). *Calculus: Early Transcendentals, 6E*. United States: Thompson Brooks/Cole.

Trigueros, M.; Bosch, M. y Gascón, J. (2011). *Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD*. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruíz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (eds.). *Un panorama de la TAD*. CRM. Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica, pp. 77-116.

Trigueros Gaisman, M. y Martínez-Planell, R. (2007). *Visualization and abstraction: Geometric representation of functions of two variables*. En T. Lamberg y L. R. Wiest (eds.). *Proceedings of the 29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 100-107.

Trigueros Gaisman, M. y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two variable functions. *Educational Studies in Mathematics* 73(1), pp. 3-19.
http://dx.doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Trigueros Gaisman, M. y Martínez-Planell, R. (2011). How are graphs of two variable functions taught? En *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Reno, Nevada: University of Nevada at Reno, Oct 20. Disponible en línea: <http:// www.allacademic.com/meta/p512583_index.html>.

Valverde, G.; Bianchi, L.; Wolfe, R.; Schmidt, W. y Houang, R. (2002). *According to the Book: Using the TIMSS to Investigate the Translation of Policy into Practice through the World of Textbooks*. London: Kluwer Academic Publishers.
http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-0844-0

Weber, E. y Thompson, P. W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics* (en prensa).
http://dx.doi.org/10.1007/s10649-014-9548-0

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, pp. 431-466.
http://dx.doi.org/10.2307/749682

Two-variable functions: analysis from the point of view of a dialogue between APOS theory and ATD

María Trigueros
Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México
trigue@itam.mx
Rafael Martínez - Planell
Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Mayagüez, Puerto Rico
rmplanell@gmail.com

This article considers an application of the dialogue between the APOS theory and the Anthropological Didactic Theory, both considered as research praxeologies. An example of the use of the results of this dialogue is presented by considering a problem regarding the learning of the graphical aspects of two variable functions. After a description of previous research that led to the design of a genetic decomposition, the research problem is reformulated so that it is possible to design research where the use of theoretical tools compatible with both theories is appropriate.

The tools resulting from the dialogue between the theories starting from the Technical – Technological component of the research praxeology were used to analyze a set of activities in order to determine its institutional pertinence and viability.

The results of the analysis of the didactical organization of the topic «graphical analysis of functions of two variables» in different lessons from a commonly used calculus textbook and through a series of teaching sessions on the same topic of a university teacher, representative of a group of teachers of multivariable calculus are discussed. Those results were used, together with the designed genetic decomposition, to develop a set of didactic activities with the goal of favoring students' learning of this topic. The development of those activities followed a process involving two research cycles: design, class implementation and analysis of results using the study moments of the ACE cycle (Activities, Class Discussion, Exercises) in order to determine those constructions that were promoted by the study process.

Results obtained from this example of the use of the tools resulting from the dialogue between the theories suggest that the genetic decomposition enables the design of a study organization of the graphical analysis of two variable functions with a stronger potential in terms of learning and that attention to the balance of the use of the study moments contributes to make the study organization better. The analysis also shows those constructions that are necessary in the learning of functions of two variables and their relation to the mathematical content needed in the didactical design. It also puts forward the didactical praxeology resulting from the use of the genetic decomposition, which contributes to the development of institutional mathematical activity where the coherence and balance of the study moments make the learning of the graphical aspects of two variable functions possible.